ALGEBRA II, 2021/I

PRÁCTICA 3

(1) a) (Propiedad universal del álgebra de polinomios)
Sea A un anillo conmutativo y $A \to B$ una A-álgebra conmutativa. Verificar que dar un morfismo de A-álgebras $A[x] \to B$ es equivalente a dar un elemento $b \in B$ (el morfismo correspondiente a $b \in B$ se denomina especialización en b). Generalización al caso de morfismos $A[x_1, \ldots, x_m] \to B$: existe una biyección canónica $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(A[x_1, \ldots, x_m], B) \cong B^m$.

b) Para $f \in A[x]$, verificar que dar un morfismo de A-álgebras
$$A[x]/(f) \to B$$
es equivalente a dar una solución $b \in B$ de la ecuación $f(x) = 0$. Generalizar al caso de varias ecuaciones en varias variables $f_1, \ldots, f_r \in A[x_1, \ldots, x_m]$.Reflexionar sobre los ejemplos $B = A$, $B = A[t]$, $B = A[[t]]$, $A = \mathbb{R} \subset B = \mathbb{C}$, etc.

(2) Dé ejemplos de
a) un anillo de división que no sea un cuerpo.
b) un anillo que no sea íntegro.
c) un anillo íntegro que no sea de división.

(3) Consideremos el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$
a) Pruebe que todo elemento de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ se escribe de manera única como $a+b\sqrt{3}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$.
b) Se define la función norma $N : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \to \mathbb{Z}$ como $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$. Probar que N es multiplicativa.
c) Pruebe que $2 + \sqrt{3}$ es una unidad.
d) Demuestre que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ es una unidad si y sólo si $N(z) = \pm 1$.
e) Encuentre otras unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

(4) a) Probar que $\mathbb{Z}[i]$ es un dominio euclídeo.
b) Probar que $\mathbb{Z}[i]/I$ es finito para todo ideal $I \subseteq \mathbb{Z}[i]$ no nulo.

(5) Sea $k[[t]]$ el anillo de series formales con coeficientes en un cuerpo k. Definimos la función $\nu : k[[t]] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$ como aquella que le asigna a una serie no nula $f = \sum_{k \geqslant 0} a_k t^k$ el número
$$\nu(f) = \min \left\{ k \in \mathbb{N}_0 : a_k \neq 0 \right\}$$
a) Demostrar que ν hace de $k[[t]]$ un anillo de valuación discreta.
b) Probar que todo ideal de $k[[t]]$ es de la forma (t^k) para cierto $k \geqslant 0$.
c) Para $f, g \in k[[t]]$, muestre que $\nu(f + g)$ no se puede acotar en función de $\nu(f)$ y $\nu(g)$.

(6) Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no es un dominio de factorización única.

(7) Sea k un cuerpo y $A = k[x,y,z,w]/(xy - zw)$. Probar que las clases $[x],[y],[z],[w] \in A$ son elementos irreducibles no asociados. Deducir que A no es un dominio de factorizacion unica.

(8) Sea k un cuerpo y $A = k[t^2, t^3] \subset k[t]$.
   a) Probar que el ideal $(t^2, t^3) \subseteq A$ no es principal. En particular, un subanillo de un anillo principal no es necesariamente principal.
   b) Verificar que los elementos $a = t^2 \in A$ y $b = t^3 \in A$ son irreducibles no asociados. Deducir de $a^3 = b^2$ que A no es de factorizacion unica.

(9) a) Sea $A = \mathsf{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \text{f es continua}\}$. Probar que para todo $f \in A$ existe $g \in A$ tal que $f = g^3$. Deducir que A no posee elementos irreducibles y que existen elementos de A que no son representables como producto de irreducibles.
   b) (Opcional) Sea $A = \mathrm{Hol}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \text{f es holomorfa}\}$. Caracterizar las unidades y elementos irreducibles de A. Probar que A es un dominio íntegro. Exhibir elementos de A no factorizables como producto finito de elementos irreducibles.

(10) Muestre que si $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{Z}[X]$ es un ideal primo entonces existe un número primo $p \in \mathbb{N}$ tal que o bien $\mathfrak{p} = (p)$ o bien existe un polinomio $f \in \mathbb{Z}[X]$ mónico e irreducible sobre $\mathbb{Z}$ tal que $\mathfrak{p} = (p, f)$.

(11) Encuentre ejemplos de dominios íntegros $A \subseteq B \subseteq C$ de manera que A y C sean dominios de factorización única pero que B no lo sea.

(12) Sea A un anillo y sea $S \subset A^\times$ un subconjunto multiplicativamente cerrado de unidades de A. Entonces $S^{-1}A \cong A$.

(13) Sea A un anillo y sea $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Si $0 \in S$, entonces $S^{-1}A = 0$.

(14) Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado e $I \subset A$ un ideal. Sea $\bar{S}$ la imagen de S por la aplicación canónica $A \to A/I$. Entonces $\bar{S}^{-1}(A/I) \cong S^{-1}A/I \cdot S^{-1}A$.

(15) Sea A un anillo y $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo. Muestre que $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativamente cerrado. En general, escribimos $A_\mathfrak{p}$ en lugar de $(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$.

(16) Sea A un anillo conmutativo. Un elemento $a \in A$ es *nilpotente* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. El *nilradical de* A es el conjunto $\mathrm{nil}(A) = \{a \in A : a \text{ es nilpotente}\}$. El *espectro de* A es $Spec(A) = \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ ideal} : \mathfrak{p} \text{ es primo}\}$. Probar que

$$\mathrm{nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ A} \mathfrak{p}.$$

En particular, el nilradical es un ideal.

(17) Sean $A = \mathsf{C}(\mathbb{R})$, $U = (0,1)$ y $S = \{f \in A : \forall t \in U,\ f(t) \neq 0\}$
   a) Probar que S es multiplicativamente cerrado en A.
   b) Sea $r : \mathsf{C}(\mathbb{R}) \to \mathsf{C}(U)$ la restricción de funciones. Muestre que existe un morfismo $\bar{r} : S^{-1}\mathsf{C}(\mathbb{R}) \to \mathsf{C}(U)$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(\mathbb{R}) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \mathsf{C}(U) \\
S^{-1}\mathsf{C}(\mathbb{R}) \arrow[ur, dotted, "\bar{r}"'] &
\end{tikzcd}$$

Además, verifique que $\bar{r}$ es inyectiva.

c) Muestre que $\bar{r}$ es un isomorfismo.

(18) Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y sea $f : A \to S^{-1}A$ la aplicación canónica.

a) Muestre que si $I \subset S^{-1}A$ es un ideal, entonces $f^{-1}(I)$ es un ideal de A.

b) De esta forma, se obtiene una aplicación $f^* : \mathsf{Id}(S^{-1}A) \to \mathsf{Id}(A)$ del conjunto de ideales de $S^{-1}A$ al conjunto de ideales de A. Muestre que f^* preserva inclusiones e intersecciones y que es inyectiva.

c) Si $J \subset A$ es un ideal, entonces J está en la imagen de f^* si y solo si $J = f^{-1}(J \cdot S^{-1}A)$ si y solo si ningún elemento de S es un divisor de cero en A/J.

d) Muestre que $f^*(\text{Spec } S^{-1}A) \subset \text{Spec } A$ de manera que, por restricción, obtenemos una inyección $f^* : \text{Spec } S^{-1}A \to \text{Spec } A$. La imagen de esta aplicación es exactamente $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}$.